EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.072**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\sin^2 \frac{\pi}{2007} + \cos^2 \frac{\pi}{2007}$.

(4p) **c)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

(4p) **d)** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC dacă $AB = 6$, $AC = 8$ și $BC = 10$.

(2p) **e)** Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(4, 5)$, $B(3, 3)$ și $C(5, \alpha)$ să fie egală cu 5.

(2p) **f)** Să se determine partea reală a numărului complex $(2-i)(3+i)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $(\hat{3}+\hat{5})\cdot\hat{3}$ în $\mathbf{Z}_7$.

(3p) **b)** Să se calculeze $3+6+9+...+99$.

(3p) **c)** Să se determine $x \in (0,\infty)$ astfel încât $\log_2 x = 3$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $2^n + 3^n \geq 50$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \cos x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2+n}\right)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimile $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Z} \right\}$, $U(G) = \{A \in G \mid \det(A) \neq 0,\ A^{-1} \in G\}$ și matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $O_2 \in G$ și $I_2 \in U(G)$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $A \in U(G)$, atunci $\det(A) = 1$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $A \in U(G)$, atunci $A^4 = I_2$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A, B, C, D \in U(G)$ și $A \cdot B \cdot C \cdot D = I_2$, atunci printre matricele A, B, C și D există două care sunt egale.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(x) = f(-x), \forall\ x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că graficul funcției f nu are asimptote.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}$.

(2p) **g)** Să se rezolve în mulțimea $(0, \infty)$ ecuația $f(x) + f(x^{21}) = f(x^2) + f(x^{2007})$.